CAPÍTULO 2

FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

2.1 Funções Vetoriais de Uma Variável Real

Vamos agora tratar de um caso particular de funções vetoriais $F : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que são as funções vetoriais de apenas uma variável real. Neste caso, temos que $n = 1$, i.e. o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 2.1.1: Dado um conjunto $Dom(F) \subseteq \mathbb{R}$, uma *função vetorial F de uma variável real* é uma correspondência que a cada ponto $t \in Dom(F)$, associa um e apenas um $Y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$. De forma simbólica, escrevemos

$$\begin{array}{rcccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^m \\ & & t & \mapsto & F(t) = (y_1, y_2, ..., y_m). \end{array}$$

Exemplo 2.1.1: Abaixo, temos exemplos de funções vetoriais de uma variável real com $m = 2$ ((a) e (c)) e $m = 3$ ((b) e (d)).
a) $F_1(t) = (2t, 4t)$, $t \geq 0$.
b) $F_2(t) = (t, 2t, 4t)$, $t \geq 0$.
c) $F_3(t) = (2\cos t, 3 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
d) $F_4(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \geq 0$.

2.2 Operações com Funções Vetoriais de Uma Variável Real

Definimos a seguir as usuais operações de adição (e diferença) e multiplicação por escalar no conjunto das funções vetoriais, da mesma forma como se faz para funções reais em Cálculo 1A. Além disso, definimos outras operações (produto e quociente por função escalar), que também são realizadas em Cálculo 1A e introduzimos duas novas definições (produto interno ou escalar e produto vetorial), que são operações entre vetores.

DEFINIÇÃO 2.2.1: Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a constante $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, definimos as seguintes funções:

a) a função $F + G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *soma de F e G*, dada por

$$(F+G)(t) = F(t) + G(t), \forall\, t \in D;$$

b) a função $F - G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *diferença entre F e G*, dada por

$$(F-G)(t) = F(t) - G(t), \forall\, t \in D;$$

c) a função $kF : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela constante k*, dada por

$$(kF)(t) = kF(t), \forall\, t \in D;$$

d) a função $fF : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela função escalar f*, dada por

$$(fF)(t) = f(t)F(t), \forall\, t \in D;$$

e) se $f(t) \neq 0$, $\forall x \in D$, a função $\dfrac{F}{f} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, chamada de *quociente de F pela função escalar f*, dada por

$$\left(\frac{F}{f}\right)(t) = \frac{F(t)}{f(t)}, \forall\, t \in D;$$

f) a função $F.G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamada de *produto escalar* (ou *produto interno*) *de F e G*, dada por

$$(F.G)(t) = F(t).G(t), \forall\, t \in D;$$

g) se $m = 3$, a função $F \times G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, chamada de *produto vetorial de F e G*, dada por

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t), \forall\, t \in D.$$

Exemplo 2.2.1: Sabendo que $f(t) = \operatorname{sen} t$, $F(t) = (t, e^t, t^2)$ e $G(t) = (t, 1, t^3)$, calcule:

(a) $F + G$ (b) $2F$ (c) fF (d) $F.G$ (e) $F \times G$.

Solução: Observe que $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Segue diretamente das definições que:

a) $(F+G)(t) = F(t)+G(t) = (t, e^t, t^2)+(t, 1, t^3) = (2t, 1+e^t, t^2+t^3)$ $(F+G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$;
b) $(2F)(t) = 2F(t) = 2(t, e^t, t^2) = (2t, 2e^t, 2t^2)$ $(2F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$;
c) $(fF)(t) = f(t)F(t) = \operatorname{sen} t\,(t, e^t, t^2) = (t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t, t^2 \operatorname{sen} t)$ $(fF : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$;

d) $(F \cdot G)(t) = F(t).G(t) = (t, e^t, t^2).(t, 1, t^3) = t^2 + e^t + t^5$ $(F \cdot G : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$;

e) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & e^t & t^2 \\ t & 1 & t^3 \end{vmatrix} = (t^3e^t - t^2, t^3 - t^4, t - te^t)$

$(F + G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$.

□

2.3 Cálculo com Funções Vetoriais de Uma Variável Real

Veremos agora os conceito de limite, continuidade e de vetor derivada de funções vetoriais de uma variável real. Iniciaremos com a definição de limite. Para isto, vamos primeiro recordar a definição de limite de funções reais de uma variáveis reais vista em Cálculo 1A. Veremos que a definição de limite de funções vetoriais de uma variável real contém a mesma essência da apresentada em Cálculo 1A, onde apenas é feito o devido ajuste na representação das distâncias entre os pontos envolvidos.

Definição de limite de funções da reta na reta: Seja f a função real $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que f está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto, possivelmente, no próprio ponto $t = t_0$). Escrevemos

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L$$

e lemos "o limite de $f(t)$, quando t tende a t_0, é igual a L", se pudermos ter os valores de $f(t)$ arbitrariamente próximos de L, bastando para isto tomar valores de t suficientemente próximos de t_0 (maiores e menores do que t_0 mas, **diferente** de t_0).

Observe que "podermos ter os valores de $f(t)$ arbitrariamente próximos de L"significa "podermos estabelecer ou escolher uma distância máxima para $f(t)$ distar L", ou seja, "podermos fornecer ou dar uma distância máximo para $f(t)$ distar L". Por outro lado, "bastando para isto tomar valores de t suficientemente próximos de t_0"significa que "existe uma distância máxima que t pode se afastar de t_0". Com as traduções apresentadas, podemos reescrever a definição acima como:

Definição de limite de funções da reta na reta: Seja f a função real $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que f está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto, possivelmente, no próprio ponto $t = t_0$). Dizemos que $f(t)$ *tende a* $L \in \mathbb{R}$, *quando* t *tende a* t_0, cuja notação é $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = L$, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado (distância arbitrária), existe $\delta > 0$ (bastar haver uma distância) tal que,

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon.$$

A seguir apresentaremos a tradução da definição acima.

Tradução da definição acima: Dada uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida no intervalo aberto I contendo t_0 (exceto possivelmente no próprio t_0), dizemos que f possui limite L quando t tente a t_0 se, dado uma distância máxima que permitimos que $f(t)$ se afaste de L (uma distância ε dada), sempre é possível encontrar uma outra distância (uma distância δ), tal que se t não se afastar de t_0 uma distância maior do que esta distância encontrada (a distância δ), o valor da função f, avaliada nos pontos desta vizinhança limitada de t_0, estará próximo de L o quanto queremos (a distância ε dada).

Ou seja, o conceito de limite é todo centrado na análise de distâncias. Como t, t_0, $f(t)$ e L são números reais, observe que $|t - t_0|$ e $|f(t) - L|$ representam, respectivamente, a distância entre t e t_0 e a distância entre $f(t)$ e L. Fixado m, onde $m \geq 1$, vamos representar a distância entre dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^m$, como $d(A, B)$. Desta forma, como t, t_0, $f(t)$, $L \in \mathbb{R}$, temos que $d(t, t_0) = |t - t_0|$ e $d(f(t), L) = |f(t) - L|$. Vamos então reescrever a definição de limite em termos da distância d entre os pontos t e t_0 e os pontos $f(t)$ e L.

Definição de limite de funções da reta na reta reescrito em termos da função distância: Seja f a função real $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que f está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto, possivelmente, no próprio ponto $t = t_0$). Dizemos que $f(t)$ *tende a* $L \in \mathbb{R}$, *quando* t *tende a* t_0, cuja notação é $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = L$, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < d(t, t_0) < \delta \Rightarrow d(f(t), L) < \varepsilon.$$

Observe que agora a definição de limite dada acima não ficou amarrada ao fato de estarmos tratando de funções da reta na reta, pois não representamos o conceito de distância entre pontos da reta particularizando. Vamos então substituir a função real de uma variável f por uma função vetorial de uma variável real F para definir o limite destas últimas funções.

Definição de limite de funções vetoriais de uma variável real utilizando a função distância: Seja F a função vetorial $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Suponha que F está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto, possivelmente, no próprio ponto $t = t_0$). Dizemos que $F(t)$ *tende a* $L \in \mathbb{R}^m$, *quando* t *tende a* t_0, cuja notação é $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < d(t, t_0) < \delta \Rightarrow d(F(t), L) < \varepsilon.$$

Vamos então fazer os devidos ajustes nas representações do conceito de distâncias entre os pontos, dependendo do espaço a que eles pertencem. Note que t e t_0 continuam sendo pontos da reta, de modo que $d(t, t_0)$ continua sendo representada por $|t - t_0|$. Entretanto $F(t)$ e L agora são pontos em $\mathbb{R}^n$, de modo que precisaremos utilizar a noção de distância em $\mathbb{R}^n$. Lembre-se que se $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ são dois vetores em $\mathbb{R}^m$, a distância entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é dada por

$$||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + ... + (v_m - u_m)^2},$$

onde a função $||\,.\,|| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é chamada de *norma*. Observe ainda que

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_m^2} = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}.$$

No que se segue, vamos supor que $Dom(F)$ é um intervalo ou uma união finita de intervalos.

DEFINIÇÃO 2.3.1: (Limite de funções vetoriais de uma variável real) Seja F a função vetorial

$$\begin{array}{rcccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^m \\ & & t & \mapsto & F(t) = (f_1(t), ..., f_m(t)). \end{array}$$

Suponha que F está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto, possivelmente, no próprio ponto $t = t_0$). Dizemos que $F(t)$ *tende a* $L = (l_1, ..., l_m) \in \mathbb{R}^m$, *quando* t *tende a* t_0, cuja notação é $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow ||F(t) - L|| = \sqrt{(f_1(t) - l_1)^2 + ... + (f_m(t) - l_m)^2} < \varepsilon,$$

ou, equivalentemente

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow (f_1(t) - l_1)^2 + ... + (f_m(t) - l_m)^2 < \varepsilon^2.$$

Observe que a soma $(f_1(t) - l_1)^2 + (f_2(t) - l_2)^2 + ... + (f_m(t) - l_m)^2$ é uma soma de parcelas positivas. Portanto, ela será arbitrariamente pequena se, e somente se, cada uma das parcelas for, por si só, arbitrariamente pequena, i.e., se, e somente se, $|f_i(t) - l_i|$, $i = 1, ..., m$, for arbitrariamente pequeno. Além disso, $|f_i(t) - l_i|$, $i = 1, ..., m$, será arbitrariamente pequeno se, e somente se, $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = l_i$, $i = 1, ..., m$. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 2.3.1: Seja F a função vetorial

$$\begin{array}{rcccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^m \\ & & t & \mapsto & F(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)). \end{array}$$

e seja $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$. Suponha que F está definida em um intervalo aberto contendo o ponto t_0 (exceto, possivelmente, no próprio ponto $t = t_0$). Então, temos que

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L \Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} f_i(t) = l_i, \quad i = 1, ...m.$$

Além disso, existindo $\lim_{t\to t_0} F(t)$, temos que

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f_1(t) \ , \ \lim_{t\to t_0} f_2(t) \ , \ \ldots \ , \ \lim_{t\to t_0} f_m(t) \right).$$

Isto é, o limite da função vetorial é o vetor formado pelos limites das funções coordenadas, em suas respectivas posições.

Portanto, pelo teorema acima, temos que

" O limite de F, quando t tende a t_0, existe e é igual a $L = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ se e somente se o limite de todas as suas funções coordenadas f_i, $i = 1, ...m$, quando t tende a t_0, existem e são iguais a l_i, $i = 1, ...m$, respectivamente."

Exemplo 2.3.1: Calcule $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}, \frac{1-\cos t}{t} \right)$.

Solução: De acordo com o teorema anterior, como $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ e $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}, \frac{1-\cos t}{t} \right) &= \left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \ , \ \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} \right) \\ &= (1, 0) \,. \end{aligned}$$

□

Observação 2.3.1: Caso o ponto $t_0 \in Dom(F)$ seja um extremo de intervalo, temos os conceitos de *limites laterais*, cujas definições são adaptações naturais da Definição 2.3.1 e cujas notações são as usuais. No caso t_0 ser um extremo inferior do intervalo, temos o limite à direita ($\lim_{t\to t_0^+}$), onde apenas consideramos uma vizinhança à direita de t_0 (i.e. $t_0 < t < t_0 + \delta$) e, no caso de t_0 ser um extremo superior do intervalo ($\lim_{t\to t_0^-}$), temos o limite à esquerda, onde apenas consideramos uma vizinhança à esquerda de t_0 (i.e. $t_0 - \delta < t < t_0$). O Teoremas 2.3.1 permanece válido se $t_0 \in Dom(F)$ for um extremo de intervalo.

As propriedades de limite conhecidas continuam válidas, acrescidas agora de propriedades envolvendo os produtos escalar e vetorial e a com norma em $\mathbb{R}^m$, em lugar do módulo. No teorema abaixo, vamos supor que D é um intervalo ou uma união finita de intervalos.

TEOREMA 2.3.2: (Propriedades de Limite) Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$, $\lim_{t\to t_0} G(t) = M$ e $\lim_{t\to t_0} f(t) = k$. Neste caso, temos que

a) $\lim_{t\to t_0}(aF \pm bG)(t) = L \pm M$, $a, b \in \mathbb{R}$
b) $\lim_{t\to t_0}(fF)(t) = kL$
c) $\lim_{t\to t_0}\left(\dfrac{F}{f}\right)(t) = \dfrac{L}{k}$, se $k \neq 0$
d) $\lim_{t\to t_0}||F(t)|| = ||L||$
e) $\lim_{t\to t_0}(F.G)(t) = L.M$
f) se $m = 3$, $\lim_{t\to t_0}(F \times G)(t) = L \times M$

Observação 2.3.2: O Teorema 2.3.2 permanece válido se $t_0 \in D$ for um extremo de intervalo.

Vejamos agora os conceito de continuidade de funções vetoriais de uma variável real.

DEFINIÇÃO 2.3.2: (Continuidade) Seja F a função vetorial $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e seja $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$. Dizemos que F é *contínua no ponto* t_0, se

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0).$$

Observação 2.3.2: Caso o ponto $t_0 \in Dom(F)$ seja um extremo de intervalo, o limite utilizado é um limite lateral apropriado.

Como corolário do Teorema 2.3.1, temos o teorema abaixo.

TEOREMA 2.3.3: Seja F a função vetorial

$$\begin{array}{rcccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^m \\ & & t & \mapsto & F(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)). \end{array} ,$$

e seja $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$. F é contínua no ponto t_0 se e somente se, f_i, $i = 1, ..., m$, são contínuas no ponto t_0.

Ou seja,

“ F é contínua em t_0 se e somente se todas as suas funções coordenadas são contínuas em t_0.”

Dizemos ainda que F é *contínua em um intervalo* $I \subset Dom(F)$, se F é contínua para todo $t \in I$ e dizemos, simplesmente, que F é *contínua*, se F é contínua para todo t em seu domínio.

Exemplo 2.3.2: Verifique que a função

$$F(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, \dfrac{1-\cos t}{t} \right) & , \text{ se } t \neq 0 \\ (1,0) & , \text{ se } t = 0 \end{cases} .$$

é contínua em toda reta.

Observação 2.3.4: Caso o ponto $t_0 \in Dom(F)$ seja um extremo de intervalo, temos os conceitos de *continuidade lateral*, cujas definições são adaptações naturais da Definição 2.3.3, utilizando os limites laterais.

Podemos agora definir formalmente o que se entende, em matemática, por uma *curva*, que, de uma certa forma, reflete a nossa noção intuitiva. Confira a definição abaixo.

DEFINIÇÃO 2.3.3: (Curva) Considere a função vetorial $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, onde I é um intervalo da reta. Se F é uma função contínua, chamamos sua imagem de *curva.*

Em outras palavras, temos que

" curva é a imagem de uma função vetorial contínua definida em um intervalo."

Observação 2.3.5: Quando estivermos nos referindo a uma curva C em $\mathbb{R}^m$, imagem da função (contínua) $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, diremos que C é uma curva *parametrizada* pela função F ou que F é uma *parametrização* para C.

Exemplo 2.3.3: Esboce a curva C, parametrizada pela função $F(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. Forneça uma outra parametrização para a curva C.

Observação 2.3.6: Nem todo autor define curva da forma que fizemos. Em alguns livros, curva é definida como a própria função vetorial contínua $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e sua imagem C é chamada de *traço* da curva. Optamos por definir da forma que fizemos para o conceito coincidir com nossa noção intuitiva.

Vamos agora às propriedades da derivada. No teorema abaixo, vamos supor que D é um intervalo ou uma união finita de intervalos.

TEOREMA 2.3.4: (Propriedades das funções contínuas) Suponha que as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas em $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq D$. Neste caso, temos que

a) a função $aF \pm bG$ é contínua em t_0, $a, b \in \mathbb{R}$
b) as funções fF,$F.G$ e $||F||$ são contínuas em t_0
c) caso $m = 3$, a função $F \times G$ é contínua em t_0

Observação 2.3.8: O Teorema 2.3.4 permanece válido se $t_0 \in D$ for um extremo de intervalo.

Vamos agora passar ao conceito de vetor derivada, utilizando limite, da mesma forma que fizemos para definir derivada em Cálculo 1A. A definição de derivada através de limite não evidencia a essência do conceito, a qual reside no fato da derivada ser a melhor tranformação linear que aproxima a variação da função numa vizinhança do ponto. Porém, optamos por apresentar utilizando limite, pela semelhança com que foi visto em Cálculo 1A e pelas interpretações que advêm desta forma de definição. Mais tarde, no Capítulo 11, quando definirmos a derivada de funções vetoriais de variáveis reais, voltaremos a este caso particular, de uma função vetorial de uma variável real, e ficará mais claro porque optamos chamar o limite apresentado aqui como vetor derivada e não, derivada, sinplesmente.

DEFINIÇÃO 2.3.4: (Vetor Derivada) Considere a função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e seja $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq D$. Dizemos que F é *derivável* (ou *diferenciável*) *em* t_0, se

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} \left(= \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \right)$$

existe. Neste caso, definimos o *vetor derivada de* F *em* t_0, denotado por $F'(t_0)$ ou $\dfrac{dF}{dt}(t_0)$, como sendo o valor deste limite.

Como corolário do Teorema 2.3.1, temos o teorema abaixo.

TEOREMA 2.3.5: Seja F a função vetorial

$$\begin{array}{rccl} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^m \\ & & t & \mapsto & F(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t)). \end{array},$$

e seja $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$. F é derivável no ponto t_0 se e somente se, f_i, $i = 1, ..., m$, são deriváveis no ponto t_0.

Além disso, se F é derivável no ponto t_0, temos que

$$F'(t_0) = (f_1'(t_0)\ ,\ f_2'(t_0)\ ,\ \ldots\ ,\ f_m'(_0))\,.$$

Isto é, o vetor derivada da função vetorial é o vetor formado pelas derivadas das funções coordenadas, em suas respectivas posições.

Ou seja,

“ F é derivável em t_0 se e somente se suas funções coordenadas são deriváveis em t_0 e, se F é derivável em t_0,

$$F'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_m'(t_0)).\text{”}$$

Exemplo 2.3.4: Calcule o vetor derivada de F em $t_0 = 1$, onde $F(t) = (3t^2,\ \operatorname{sen} t^3, e^{t^2})$.

Solução: Conforme observado acima, como todas as três funções coordenadas de F são deriváveis para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} F'(1) &= \left((3t^2)'\big|_1 , (\ \operatorname{sen} t^3)'\big|_1 , (e^{t^2})'\Big|_1 \right) \\ &= \left(6t\big|_1 , 3t^2 \cos t^3\big|_1 , 2t\, e^{t^2}\Big|_1 \right) \\ &= (6\,,\ 3\cos 1\,,\ 2e)\,. \end{aligned}$$

□

Observação 2.3.9: Caso o ponto $t_0 \in Dom(F)$ seja um extremo de intervalo, temos os conceitos de *vetores derivadas laterais*, cujas definições são adaptações naturais da Definição 2.3.4 e cujas notações são as usuais.

Vamos agora às propriedades da derivada. No teorema abaixo, vamos supor que D é um intervalo ou uma união finita de intervalos.

TEOREMA 2.3.6: (Propriedades do Vetor Derivada) Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, todas diferenciáveis em $t_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq D$. Neste caso, temos que

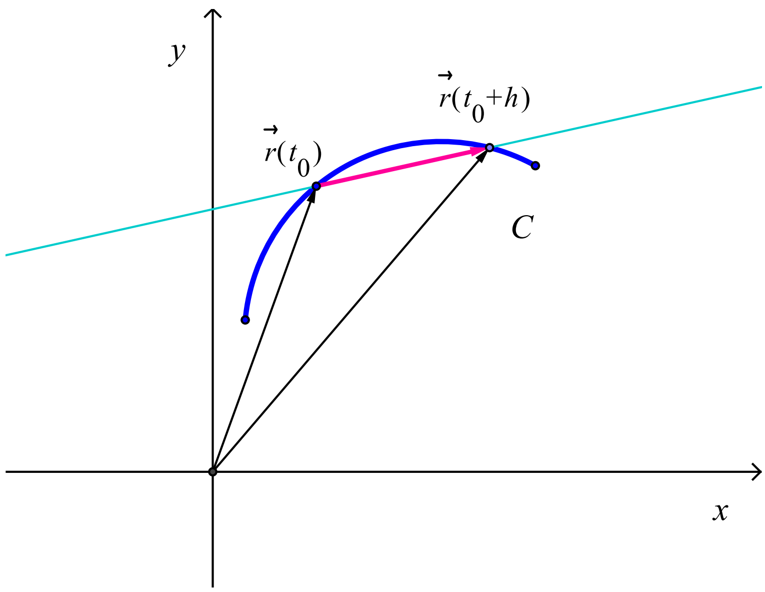
a) $(aF \pm bG)'(t_0) = aF'(t_0) \pm bG'(t_0)$, $a, b \in \mathbb{R}$
b) $(fF)'(t_0) = f'(t_0)F(t_0) + f(t_0)F'(t_0)$
c) $(F.G)'(t_0) = F'(t_0).G(t_0) + F(t_0).G'(t_0)$
d) caso $m = 3$, $(F \times G)'(t_0) = F'(t_0) \times G(t_0) + F(t_0) \times G'(t_0)$
e) $||F||'(t_0) = \left(\sqrt{F.F}\right)'(t_0) = \dfrac{F(t_0).F'(t_0)}{||F(t_0)||}$

Observação 2.3.10: O Teorema 2.3.6 permanece válido se $t_0 \in D$ for um extremo de intervalo.

Dizemos ainda que a função $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* ou *derivável em um intervalo* $I \subset D$ se F é diferenciável para todo $t \in I$ e dizemos simplesmente que F é *diferenciável* ou *derivável* se F é derivável para todo $t \in B$.

2.4 Interpretação Geométrica do Vetor Derivada

Considere o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e um ponto t_0 pertence ao interior do intervalo I. Seja C uma curva no plano, parametrizada pela função contínua e injetora $\vec{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}$ diferenciável em t_0. Considere agora dois pontos P e Q em C, cujos vetores posição são, respectivamente, $\vec{r}\,(t_0)$ e $\vec{r}\,(t_0 + h)$. Neste caso, $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}\,(t_0 + h) - \vec{r}\,(t_0)$ é um vetor sobre a reta secante à curva C que contém os pontos P e Q (figura abaixo). Se $h \neq 0$, o vetor $\dfrac{\vec{r}\,(t_0 + h) - \vec{r}\,(t_0)}{h}$ é um múltiplo escalar do vetor $\vec{r}\,(t_0 + h) - \vec{r}\,(t_0)$, o qual possui a mesma direção do vetor $\vec{r}\,(t_0 + h) - \vec{r}\,(t_0)$. Além disso, quando $h \to 0$, o vetor $\dfrac{\vec{r}\,(t_0 + h) - \vec{r}\,(t_0)}{h}$ se aproxima de um vetor sobre a reta tangente à curva C no ponto P. Por esta razão, $\vec{r}\,'(t_0)$ é chamado de *vetor tangente* à curva C, parametrizada por $\vec{r}$, no ponto P. Confira a definição a seguir.



DEFINIÇÃO 2.4.1: Seja C a curva parametrizada pela função contínua e injetora $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e seja $\vec{r}\,(t_0) \in C$ um ponto tal que o vetor derivada $\vec{r}\,'(t_0)$ existe e é

não-nulo.

a) **(Vetor unitário tangente)** O vetor $\vec{t}\,(t_0) = \dfrac{\vec{r}\,'(t_0)}{||\vec{r}\,'(t_0)||}$ é o *vetor unitário tangente* à curva C no ponto $\vec{r}\,(t_0)$.

b) **(Reta tangente)** Uma equação paramétrica da *reta tangente* à curva C no ponto $\vec{r}\,(t_0)$ é dada por

$$(x, y) = \vec{r}\,(t_0) + \lambda\vec{r}\,'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.4.1: Determine a equação da reta tangente à curva C, parametrizada por $\vec{r}$, onde $\vec{r}\,(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, no ponto (0,1).

Solução: Conforme visto acima, uma equação da reta tangente à curva C, parametrizada pela função $\vec{r}$, no ponto $\vec{r}\,(t_0)$, é dada por

$$(x, y) = \vec{r}\,(t_0) + \lambda\vec{r}\,'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

se $\vec{r}\,'(t_0)$ é não-nulo. No caso, temos que $\vec{r}\,'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, de modo que $||\vec{r}\,'(t)|| \neq 0$, para todo $t \in [0, 2\pi]$. Além disso, temos que o ponto (0,1) corresponde a $\vec{r}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. De fato, resolver a igualdade $\vec{r}\,(t_0) = (0, 1)$, corresponde a resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t_0) = \cos t_0 & = & 0 \\ & & \\ y(t_0) = \ \operatorname{sen} t_0 & = & 1 \end{array}\right. \quad t_0 \in [0, 2\pi],$$

cuja solução é $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Sendo assim, temos que

$$\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0).$$

Portanto, a equação da reta tangente pedida é dada por

$$(x, y) = (0, 1) + \lambda(-1, 0),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

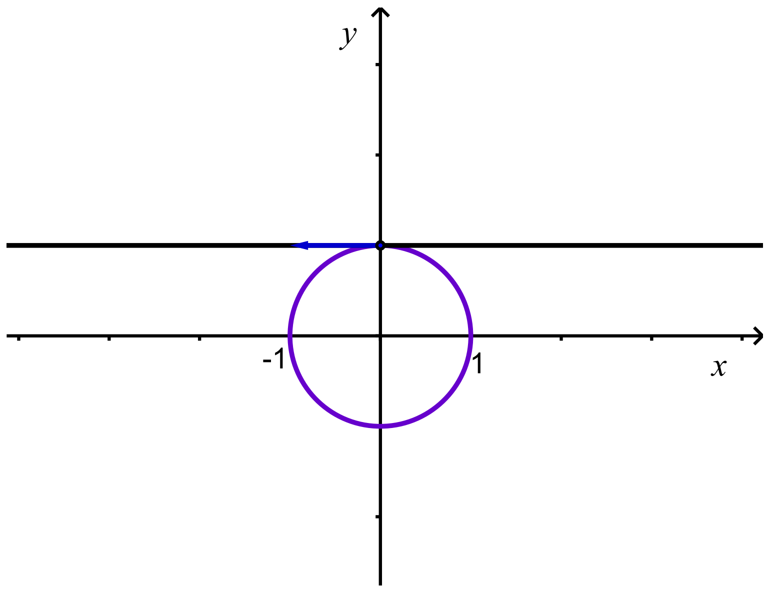
isto é,

$$(x, y) = (-\lambda, 1),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

o que corresponde à reta

$$y = 1.$$

Note que $\vec{r}$ não é injetora em $[0, 2\pi]$, pois $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (1, 0)$ que, apesar de não ser o ponto em questão no problema, é tal que a derivada à direita de $\vec{r}$ no ponto $t_0 = 0$ é igual à derivada de $\vec{r}$ à esquerda no ponto $t_1 = 2\pi$ $((\vec{r})'_+(0) = (0, 1) = (\vec{r})'_-(2\pi))$.



□

Observação 2.4.1: Nas definições anteriores, pedimos que a parametrização $\vec{r}$ fosse injetora, pois, caso contrário, um ponto P na curva C poderia corresponder a dois valores t_0 e t_1 distintos. Isto poderia gerar inconsistência se, por exemplo, os vetores $\vec{r}\,'(t_0)$ e $\vec{r}\,'(t_1)$ forem vetores tangentes com direções diferentes. Com a exigência da injetividade de $\vec{r}$, dado um ponto P na curva C, temos que a equação $\vec{r}(t_0) = P$ fornece uma única solução para t_0.

Observação 2.4.2: Se C é uma curva no espaço, parametrizada pela função $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, temos a mesma interpretação geométrica do vetor derivada, bem como temos as definições de *vetor unitário tangente* e de *reta tangente*, apenas com a alteração de que a equação da reta tangente deve-se incluir a coordenada z, passando a ser

$$(x, y, z) = \vec{r}\,(t_0) + \lambda\vec{r}\,'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

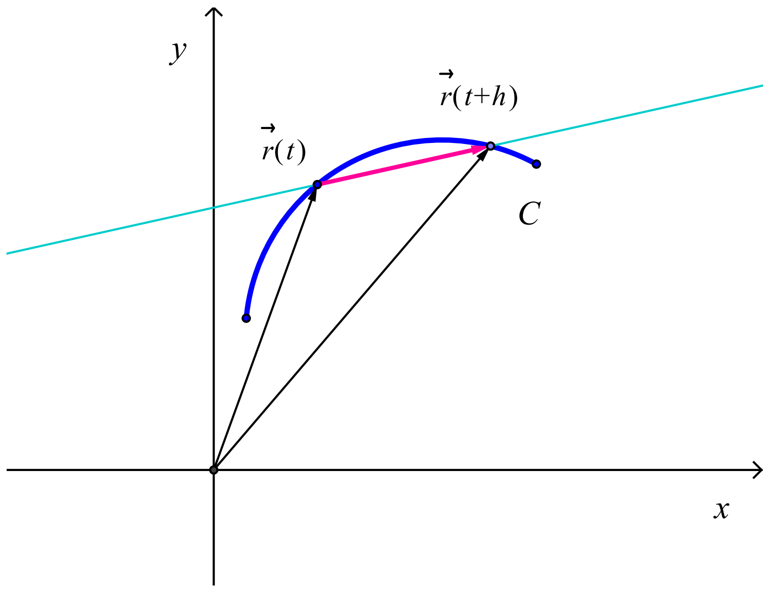
2.5 Interpretação Física do Vetor Derivada

Uma razão para escolher especificamente $\vec{r}\,'(t)$ como o vetor tangente, em vez de um múltiplo dele, é que em diversas aplicações o parâmetro t corresponde à variável tempo e $\vec{r}\,(t)$ se interpreta como a posição de uma partícula que desloca ao longo da trajetória $C = \vec{r}(I)$ no espaço ou no plano. Com esta interpretação, $||\vec{r}\,'(t)||$ corresponde à *velocidade (escalar)* da partícula no instante t quando esta se movimenta ao longo da trajetória. O termo "velocidade" se deve ao fato de que, para h pequeno, tem-se que $\dfrac{||\vec{r}\,(t) - \vec{r}\,(t+h)||}{|h|}$ é aproximadamente a taxa média de distância percorrida no o intervalo entre t e $t + h$ (figura abaixo). Além do mais, é fácil mostrar que se $\vec{r}\,'(t)$

existe,

$$\lim_{h\to 0}\frac{||\vec{r}\,(t+h)-\vec{r}\,(t)||}{|h|}=||\vec{r}\,'(t)||.$$

Sendo assim, $||\vec{r}\,'(t)||$ é o limite das taxas médias em intervalos de tempo arbitrariamente pequenos. Desta forma, a função real v definida por $v(t)=||\vec{r}\,'(t)||$ é chamada de *velocidade escalar*, e o vetor $\vec{v}$, definido por $\vec{v}\,(t)=\vec{r}\,'(t)$, é chamado de *vetor velocidade* no ponto $\vec{r}\,(t)$.



Da mesma forma, se $\vec{v}\,(t)$ é derivável, definimos $\vec{a}\,(t)=\vec{v}\,'(t)$ como o *vetor aceleração* do movimento e $a(t)=||\vec{a}\,(t)||$ como a *intensidade da aceleração.* Quando $\vec{r}\,(t)$ descreve a trajetória de uma partícula de massa constante m, então $m\vec{a}\,(t)$ é o vetor força que atua sobre a partícula e $ma(t)$ é a intensidade da força que age na partícula.

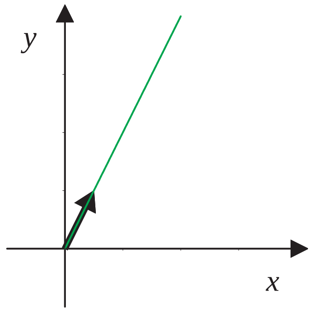
2.6 Exercícios

Exercício 2.6.1: Considere as funções do Exemplo 2.1.1. Determine e esboce (se possível) as imagens e os gráficos destas funções.

Solução:

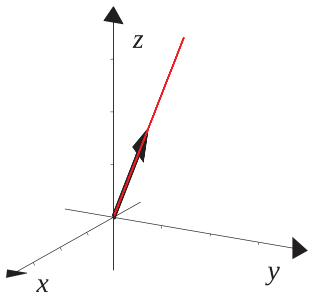
a) Temos que a imagem de F_1 é o conjunto

$$Im(F_1) = \{(2t, 4t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \geq 0\}.$$



Observe que como $x = 2t$ e $y = 4t$, temos que $y(t) = 2x(t)$, $t \geq 0$. Portanto, a imagem desta função é a semi-reta (em $\mathbb{R}^2$) $y = 2x$, $x \geq 0$. Uma outra forma de verificar que trata-se de uma semi-reta, é observar que $F_1(t) = (2t, 4t) = t(2, 4)$, $t \geq 0$. Portanto, a imagem desta função é a semi-reta (em $\mathbb{R}^2$) que contém a origem e é paralela ao vetor $(2, 4)$ (apenas múltiplos positivos deste vetor). A imagem de F_1 está esboçada ao lado.
O gráfico de F_1 é o conjunto

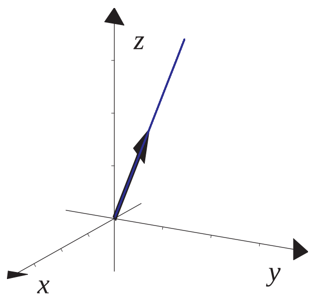
$$G(F_1) = \{(t, 2t, 4t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \geq 0\}.$$



Conforme observado no item anterior, podemos escrever o conjunto de pontos $(t, 2t, 4t)$, $t \geq 0$, como $(t, 2t, 4t) = t(1, 2, 4)$, $t \geq 0$. Portanto, a imagem desta função é a semi-reta (em $\mathbb{R}^3$) que contém a origem e é paralela ao vetor $(1, 2, 4)$ (apenas múltiplos positivos deste vetor). O gráfico de F_1 está esboçado ao lado.

b) Temos que a imagem de F_2 é o conjunto

$$Im(F_2) = \{(t, 2t, 4t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \geq 0\}.$$



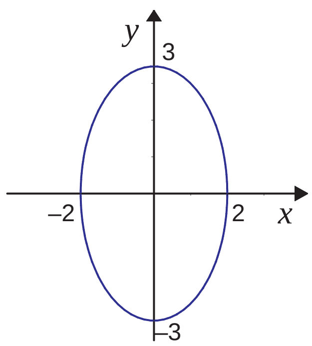
Observe que a *imagem* de F_2 coincide com o *gráfico* de F_1 (figura ao lado).
O gráfico de F_2 é o conjunto

$$G(F_2) = \{(t, t, 2t, 4t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, t \geq 0\}.$$

Como o gráfico de F_2 está em $\mathbb{R}^4$, não podemos esboçá-lo.

c) Temos que a imagem de F_3 é o conjunto

$$Im(F_3) = \{(2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in [0, 2\pi]\}.$$

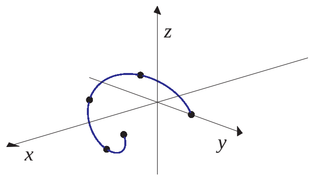


Observe que como $x(t) = 2\cos t$ e $y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t$, $t \in [0, 2\pi]$, temos que $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$. Portanto, todos os pontos da imagem da função F_3 estão contidos na elipse $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$. Não faremos aqui, mas é possível mostrar que as equações acima representam não apenas alguns pontos desta elipse, mas sim, todos os pontos da mesma (figura ao lado).

O gráfico de F_3 é o conjunto

$$G(F_3) = \{(t, 2\cos t, 3\ \mathrm{sen}\, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in [0, 2\pi]\}.$$

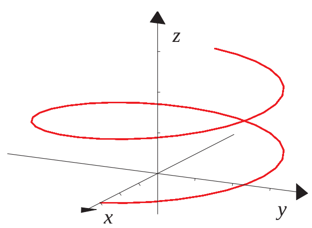
Para esboçar este conjunto, observe inicialmente que sendo $y(t) = 2\cos t$ e $z(t) = 3\ \mathrm{sen}\, t$, temos, conforme visto acima, que $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$. Ou seja, a projeção do gráfico de F_3, no plano yz, é uma elipse. Desta forma, temos que as coordenadas y e z do gráfico da função F_3 estão contidas no cilindro elíptico reto $\dfrac{x^2(t)}{4} + \dfrac{y^2(t)}{9} = 1$, $x \in [0, 2\pi]$, pois $x = t \in [0, 2\pi]$. Para finalizar, observe que a variável x vai aumentando, variando de $x = 0$ até $x = 2\pi$, conforme o valor de t vai crescendo, pois $x = t$. Desta forma, temos como gráfico da função F_3 é uma curva que faz uma espiral para frente, conforme o valor de t aumenta. Este exemplo é semelhante ao Exemplo 1.2.8, onde a circunferência é substituída por uma elipse e temos apenas uma volta da *hélice*. O gráfico de F_3 está esboçado na figura ao lado.



d) Temos que a imagem de F_4 é o conjunto

$$Im(F_4) = \{(\cos t,\ \mathrm{sen}\, t, t) \in \mathbb{R}^t \,|\, t \geq 0\}.$$

Para esboçar a *imagem* da função F_4, observe que ela é muito semelhante ao *gráfico* da função do Exemplo 1.2.8, onde os pontos da imagem agora pertencem ao cilindro, no plano xy, $x^2(t) + y^2(t) = 1$, $z \geq 0$, pois $z = t \geq 0$.. Portanto, a projeção da imagem da função F_4, no plano xy, é a circunferência de centro na origem e raio igual a um. Além disto, quando o valor de t vai aumentando, a variável z também vai aumentando ($z = t$). Desta forma, temos como imagem da função F_4, uma mola ou uma semi-hélice na vertical (figura ao lado). O gráfico de F_4 é o conjunto



$$G(F_4) = \{(t, \cos t,\ \mathrm{sen}\, t, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, t \geq 0\}.$$

Como o gráfico de F_4 está em $\mathbb{R}^4$, não podemos esboçá-lo.

$\square$

Exercício 2.6.2: Obtenha a equação da reta tangente à imagem da função $F(t) = (\cos t,\ \mathrm{sen}\, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, no ponto de sua imagem que corresponde a $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Solução: Observe que quando $t = \dfrac{\pi}{2}$, temos que

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right).$$

Portanto a equação da reta tangente pedida é igual a

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= F\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda F'\left(\frac{\pi}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right) + \lambda F'\left(\frac{\pi}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Desta forma, devemos encontrar $F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Derivando então F e calculando $F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, encontramos

$$F'(t) = \begin{cases} x(t) = -\operatorname{sen} t \\ y(t) = \cos t \\ z(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 1)$$

A equação desejada é então

$$(x, y, z) = \left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) + \lambda\left(-1, 0, 1\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

2.7 Apêndice: Uma Observação Interessante Sobre o Vetor Derivada

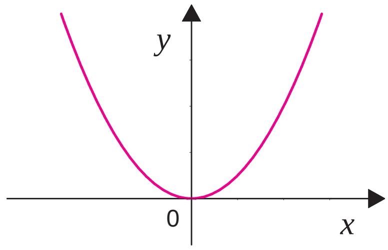
Lembre-se que para uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sua derivada em um ponto x_0 pertencente a um intervalo aberto contido no domínio de f, se existir, fornece o coeficiente linear da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Portanto, em se tratando de funções da reta na reta, associamos a diferenciabilidade de uma função f à suavidade do seu *gráfico*. O que fizemos agora, não foi trabalhar com o gráfico da funções vetoriais de uma variável e sim com sua *imagem*. Vimos uma interpretação geométrica bem diferente para o vetor derivada de funções vetoriais de uma variável, que é relacionada à sua *imagem*. Portanto, o fato de uma curva, *imagem* de uma função vetorial F, apresentar ou não "bicos", nada mais tem a ver com a diferenciabilidade da função vetorial F. Nos dois exemplos abaixo, ilustramos situações que mostram que não há relação entre a diferenciabilidade de uma função vetorial de uma variável e o fato de sua *imagem* possuir ou não "bicos". No primeiro exemplo, temos um caso em que uma curva suave pode tanto ser ou não a imagem de uma função diferenciável e, no segundo exemplo, temos um caso contrário, em que uma curva que apresenta "bicos"pode tanto ser ou não a imagem de uma função diferenciável.

Exemplo 2.7.1: Considere as três funções vetoriais abaixo.

$$F_1(t) = (t, t^2), \quad F_2(t) = (t^3, t^6) \quad \text{e} \quad F_3 = \begin{cases} (t, t^2), & \text{se } t \geq 0 \\ (t^3, t^6), & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Determine e esboce a imagem destas funções e verifique que F_1 e F_2 são diferenciáveis na origem, enquanto que F_3 não é diferenciável na origem.

Solução: Nos três casos acima, temos que $y(t) = (x(t))^2$, de modo que a imagem das três funções é a parábola $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (figura ao lado). Quanto à diferenciabilidade destas funções, é fácil ver que



$$F_1'(t) = (1, 2t) \quad \text{e} \quad F_2(t) = (3t^2, 6t^5),$$

de modo que

$$F_1'(0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad F_2'(0) = (0, 0).$$

Observe ainda, que tanto F_1 como F_2 são diferenciáveis na origem, mas que só F_1 possui reta tangente na origem (a reta $y = 0$), uma vez que $F_2'(0) = (0, 0)$. Já em relação à função F_3, temos que

$$F_3'(t) = \begin{cases} (1, 2t), & \text{se } t > 0 \\ \nexists, & \text{se } t = 0 \\ (3t^2, 6t^5), & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

pois o limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F_3(h) - F_3(0)}{h}$ não existe, uma vez que os limites laterais são diferentes. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{F_3(h) - F_3(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h}{h}, \frac{h^2}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^+} (1, h) = (1, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{F_3(h) - F_3(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{h^3}{h}, \frac{h^6}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^-} \left(h^2, h^5 \right) = (0, 0). \end{aligned}$$

□

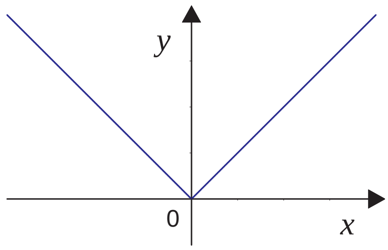
Exemplo 2.7.2: Considere as funções vetoriais

$$G_1(t) = (t, |t|) \quad \text{e } G_2(t) = (t|t|, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine e esboce a imagem destas funções e verifique que G_1 não é diferenciável na origem, enquanto que G_2 é diferenciável na origem.

Solução: Observe que

$$G_2(t) = \begin{cases} (-t^2, t^2), & \text{se } t < 0 \\ (t^2, t^2), & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$



Deste modo, temos que

$$y(t) = \begin{cases} -x(t), & \text{se } x < 0 \\ x(t), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Portanto, a imagem de G_2 é dada por $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Da mesma forma, como $G_1(t) = (t, |t|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, também temos que $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a imagem das duas funções é igual a $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ (figura ao lado). Vamos agora estudar a diferenciabilidade destas funções na origem. Quanto à diferenciabilidade da função G_1, observe que

$$G_1'(t) = \begin{cases} (1, -1), & \text{se } t < 0 \\ \nexists, & \text{se } t = 0 \\ (1, 1), & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

pois

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h}{h}, \frac{h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^+} (1, 1) = (1, 1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{h}{h}, \frac{-h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^-} (1, -1) = (1, -1). \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h}$, temos que não existe $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{G_1(h) - G_1(0)}{h}$, o que significa que G_1 não é diferenciável na origem.

Quanto à diferenciabilidade da função G_2, observe que

$$G_2'(t) = \begin{cases} (-2t, 2t), & \text{se } t < 0 \\ (0, 0), & \text{se } t = 0 \\ (2t, 2t), & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

pois,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{G_2(h) - G_2(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h^2}{h}, \frac{h^2}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^+} (h, h) = (0, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{G_2(h)-G_2(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\left(-\frac{h^2}{h},\frac{h^2}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0^-}(-h,h)=(0,0).\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{G_2(h)-G_2(0)}{h}=(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{G_1(h)-G_1(0)}{h}$, temos que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{G_1(h)-G_1(0)}{h}=(0,0)$, o que significa que $\vec{G_1}'(0)=(0,0)$.

$\square$